Colles de Maths - semaine 1
Lycée Aux Lazaristes

Julien Allasia - ENS de Lyon

Questions de cours

- Montrer que la composition de deux applications injectives (resp. surjectives, bijectives) est aussi injective (resp. surjective, bijective).
- Montrer qu'une application est bijective si et seulement si elle est inversible.
- Montrer qu'il y a équivalence entre la donnée d'une partition d'un ensemble et d'une relation d'équivalence sur cet ensemble.
- Montrer que, si $f \circ g$ est injective, alors g est injective. Montrer que, si $f \circ g$ est surjective, f est surjective.
- Enoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice (différence symétrique) Soit E un ensemble. On appelle différence symétrique de deux parties F et G de E la partie

$$F \Delta G = (\bar{F} \cap G) \cup (F \cap \bar{G}).$$

1. Montrer que, pour toutes parties F et G de E, on a $F \Delta G = (F \cup G) \cap \overline{F \cap G}$.
2. Montrer que, pour toutes parties F et G, la fonction indicatrice de $F \Delta G$ est égale à $\mathbb{1}_F + \mathbb{1}_G - 2\mathbb{1}_F \mathbb{1}_G$. Retrouver le résultat de la question précédente.
3. Montrer que Δ est une loi de composition interne sur $\mathcal{P}(E)$ associative, commutative, d'élément neutre $\emptyset$, et telle que toute partie admette un élément symétrique.
4. Montrer que la loi $\cap$ est distributive sur Δ.

Exercice Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. On pose

$$\phi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (A \cap X, B \cap X) \end{array} \right.$$

1. Montrer que ϕ est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ soit surjective.
3. On suppose que ϕ est bijective. Calculer son inverse.

Exercice Soit E un ensemble. Soit $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Exercice (résultats classiques) Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.

1. Soit A une partie de E. Quelle relation a-t-on entre $f^{-1}(f(A))$ et A ?
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité pour toute partie A de E.
3. Soit B une partie de F. Quelle relation a-t-on entre $f(f^{-1}(B))$ et B ?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait égalité pour toute partie B de F.

Exercice Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$
2. $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \min(i, j)$
3. $\displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i)$ (pour $n \geq 2$)

Exercice (translation et dérivation discrète) Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit les opérateurs suivants (c'est-à-dire des fonctions de E dans E) :

— pour tout $f \in E$, $\tau(f)$ est la fonction $x \longmapsto f(x+1)$

— pour tout $f \in E$, $\delta(f)$ est la fonction $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$.

1. τ, δ sont-elles injectives ?
2. Déterminer l'image réciproque de 0 par δ.
3. Montrer que δ est surjective.

Exercice (une méthode classique) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Soit $S_1 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k}$ et $S_2 = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$. Calculer $S_1 + S_2$ et $S_1 - S_2$, en déduire S_1 et S_2.
2. En déduire une méthode pour calculer la somme $\sum_{\substack{k=0 \\ k=0[3]}}^{n} \binom{n}{k}$.

Exercice (un calcul à connaître) Calculer le produit $\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ avec des factorielles.

Exercice Déterminer les réels $x_1, ..., x_n$ tels que l'on ait

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k = n.$$

Exercice Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$.

Exercice (différentes méthodes de calculs d'une somme) Calculer les sommes suivantes.

1. $\sum_{k=0}^{n} k(3k-1)$.
2. $\sum_{k=0}^{n} \frac{2^{k-1}}{3^{k+1}}$.
3. $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

Exercice (somme géométrique dérivée)

1. Calculer $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} k$.
2. Déduire de la formule de la somme géométrique la somme suivante, où a est un réel et p, q sont deux entiers positifs : $\sum_{k=p}^{q} k\, a^{k-1}$.
3. En déduire $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$.
4. En déduire une autre méthode pour calculer $\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{n} k$.